MECÂNICA ANALÍTICA

Prof. Nivaldo A. Lemos — 1º Semestre de 2010

Segunda Prova — 12/05/2010

Questão 1. (3,0 pontos) Seja $\mathcal{P}$ uma matriz de rotação de 180^o em torno de um eixo arbitrário. (i) Determine $\mathcal{P}^2$ sem cálculos, refletindo sobre o seu significado. (ii) Sendo $\mathcal{A} = (\boldsymbol{I} + \mathcal{P})/2$ e $\mathcal{B} = (\boldsymbol{I} - \mathcal{P})/2$, prove que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$. (iii) Obtenha a matriz de $\mathcal{P}$ na base em que o eixo de rotação é o eixo z. (iv) Mostre que as matrizes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são singulares.

Questão 2. Uma esfera rígida homogênea rola sem deslizar sobre um plano horizontal. Se (x, y, R) são as coordenadas do centro da esfera em relação a um sistema (x, y, z) de eixos fixos no espaço, e θ, ϕ, ψ são ângulos de Euler de um sistema (x', y', z') de eixos fixos na esfera com origem no seu centro, os vínculos de rolamento são

$$\dot{x} - R(\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{y} + R(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) = 0\,.$$

(a) (1,0 ponto) Se I é o momento de inércia da esfera em relação a um eixo passando por seu centro, mostre que a lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta)\,.$$

(b) (2,0 pontos) Deduza as equações de movimento

$$m\ddot{x} = \lambda_1\,, \;\; m\ddot{y} = \lambda_2\,,$$

$$I\frac{d}{dt}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0\,,$$

$$I(\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta) = -\lambda_1 R\,\mathrm{sen}\,\phi + \lambda_2 R\cos\phi\,,$$

$$I\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = R\,\mathrm{sen}\,\theta(\lambda_1\cos\phi + \lambda_2\,\mathrm{sen}\,\phi)\,.$$

(c) (1,0 ponto) Prove que ω_z é constante de movimento.

Questão 3. (3,0 pontos) O movimento do sistema abaixo está restrito a uma linha reta e não há atrito. Na configuração de equilíbrio, indicada pelas linhas tracejadas, todas as molas têm o mesmo comprimento natural. (a) Usando as coordenadas indicadas na figura, escreva a lagrangiana e as equações de Lagrange do sistema. (b) Recorrendo apenas a argumentos físicos, sem fazer cálculos, determine o valor da menor frequência característica, ω_1, e represente graficamente o modo normal de vibração correspondente. (c) O segundo modo normal de vibração, para o qual $x_2 = -x_1$, tem frequência $\omega_2 = \sqrt{(k + 2\tilde{k})/m}$. Justifique este valor por argumentos físicos.